Esercizio. Con un'opportuna sostituzione, calcolare:

$$\int \frac{6-5\sqrt{x}}{2x^2-6x\sqrt{x}}dx.$$

Risoluzione.
Posto $\sqrt{x}=t$, abbiamo la sostituzione $x=t^2$, da cui $dx=2t\,dt$. Allora:

$$I=\int \frac{6-5\sqrt{x}}{2x^2-6x\sqrt{x}}dx=\int \frac{6-5t}{2t^4-6t^2\cdot t}\cdot 2t\,dt=\int \frac{6-5t}{t^3-3t^2}\,dt$$

Abbiamo ora una funzione razionale alla quale applichiamo il metodo dei coefficienti indeterminati (osservare che 0 è radice doppia del denominatore):

$$\begin{aligned}
\frac{-5t+6}{t^2(t-3)} &= \frac{a}{t}+\frac{b}{t^2}+\frac{c}{t-3}\\
-5t+6 &= at(t-3)+b(t-3)+ct^2\\
-5t+6 &= at^2-3at+bt-3b+ct^2\\
-5t+6 &= (a+c)t^2+(b-3a)t-3b
\end{aligned}$$

Uguagliamo i coefficienti dei termini di pari grado[1]:

$$\begin{cases} a+c=0\\ b-3a=-5\\ -3b=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-2\\ -2-3a=-5\\ c=-a \end{cases} \qquad \begin{cases} a=1\\ b=-2\\ c=-1 \end{cases}$$

Allora abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{6-5t}{t^3-3t^2}\,dt &= \int \frac{1}{t}dt-\int \frac{2}{t^2}dt-\int \frac{1}{t-3}dt=\\
&= \log|t|+\frac{2}{t}-\log|t-3|+k
\end{aligned}$$

Infine, sostituendo t con $\sqrt{x}$, otteniamo l'integrale richiesto:

$$I=\log\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}-\log|\sqrt{x}-3|+k=\log\frac{\sqrt{x}}{|\sqrt{x}-3|}+\frac{2}{\sqrt{x}}+k$$

[1] Un altro modo per trovare a, b, c è sostituire a t valori opportuni, cioè 0, 3, 1.