

Esercizio. Con un'opportuna sostituzione, calcolare:

$$\int \frac{6 - 5\sqrt{x}}{2x^2 - 6x\sqrt{x}} dx.$$

Risoluzione.

Posto $\sqrt{x} = t$, abbiamo la sostituzione $x = t^2$, da cui $dx = 2t dt$. Allora:

$$I = \int \frac{6 - 5\sqrt{x}}{2x^2 - 6x\sqrt{x}} dx = \int \frac{6 - 5t}{2t^4 - 6t^2 \cdot t} \cdot 2t dt = \int \frac{6 - 5t}{t^3 - 3t^2} dt$$

Abbiamo ora una funzione razionale alla quale applichiamo il metodo dei coefficienti indeterminati (osservare che 0 è radice doppia del denominatore):

$$\begin{aligned} \frac{-5t + 6}{t^2(t - 3)} &= \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t - 3} \\ -5t + 6 &= at(t - 3) + b(t - 3) + ct^2 \\ -5t + 6 &= at^2 - 3at + bt - 3b + ct^2 \\ -5t + 6 &= (a + c)t^2 + (b - 3a)t - 3b \end{aligned}$$

Uguagliamo i coefficienti dei termini di pari grado¹:

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b - 3a = -5 \\ -3b = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -2 \\ -2 - 3a = -5 \\ c = -a \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

Allora abbiamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{6 - 5t}{t^3 - 3t^2} dt &= \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{2}{t^2} dt - \int \frac{1}{t - 3} dt = \\ &= \log |t| + \frac{2}{t} - \log |t - 3| + k \end{aligned}$$

Infine, sostituendo t con \sqrt{x} , otteniamo l'integrale richiesto:

$$I = \log \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \log |\sqrt{x} - 3| + k = \log \frac{\sqrt{x}}{|\sqrt{x} - 3|} + \frac{2}{\sqrt{x}} + k$$

¹Un altro modo per trovare a , b , c è sostituire a t valori opportuni, cioè 0, 3, 1.